

Kuličková matematika

Hana Kotinová, Česká federace mankalových her, federace@mankala.cz

Abstrakt

Existuje nemálo her, kde se něco počítá. Velmi často stačí umět krokovat, tedy posunout se po hracím plánu o příslušný počet polí (např. člověče, nezlob se), nebo si započítat body za provedenou akci (např. Carcassonne). Také existují hry, které jsou vyložené o počítání, např. Abaku. A pak existují hry, které se na pohled tváří, že si vystačíte s krokováním, ale časem objevíte, že se skvěle hodí na procvičování sčítání, odčítání a násobení. Menší děti mohou dále počítat po jedné, ale dospěláci dají pravděpodobně přednost rychlejšímu výpočtu. Plus, minus, krát a modulo a hned vím, kdopak asi vyhraje. Řeč tedy bude o objevování matematiky v Mankale, rodině her s důlky a kuličkami.

Co je to mankala

Mankala je jazykově příjemné pojmenování, tj. krátké a hezky vyslovitelné pro spoustu národů. Bohužel se tak jmenovala jedna varianta ze skupiny podobných her, která se svými pravidly dost vymykala těm ostatním, takže Ti, kdo znají historii a několik dalších variant, toto pojmenování nepoužívají rádi pro celou skupinu. My ho však používat budeme. Za mankalovou hru považujeme každou hru, která se hraje buď na desce, která obsahuje několik řad důlků, případně na několika miskách, vhodně pro hru seřazených. Každý důlek obsahuje na začátku hry určité (obvykle stejné) množství kuliček. Nejčastěji se tedy setkáte s deskou, která má dvě řady po šesti důlcích, se čtyřmi kuličkami v každém důlku. Kromě toho mohou být po straně větší důlky, co by pokladnice na sebrané kuličky. V běžném hračkářství tento typ her nebývá, ve specializovaných obchodech lze najít nejčastěji Kalahu (tato varianta také používá 2x6 důlku a čtyři kuličky), přes internet lze najít i další desky. Naštěstí lze ale soupravu velmi snadno vyrobit, ta nejlevnější a zároveň ideální pro hru ve třídě s větší skupinou dětí je z obyčejných papírových tácků a plastových víček o limonád.

Takže máme připravenou desku, kuličky a můžeme začít hrát. Před sebou máte pět misek, jedna z nich obsahuje tři kuličky. Rozdejte kuličky.

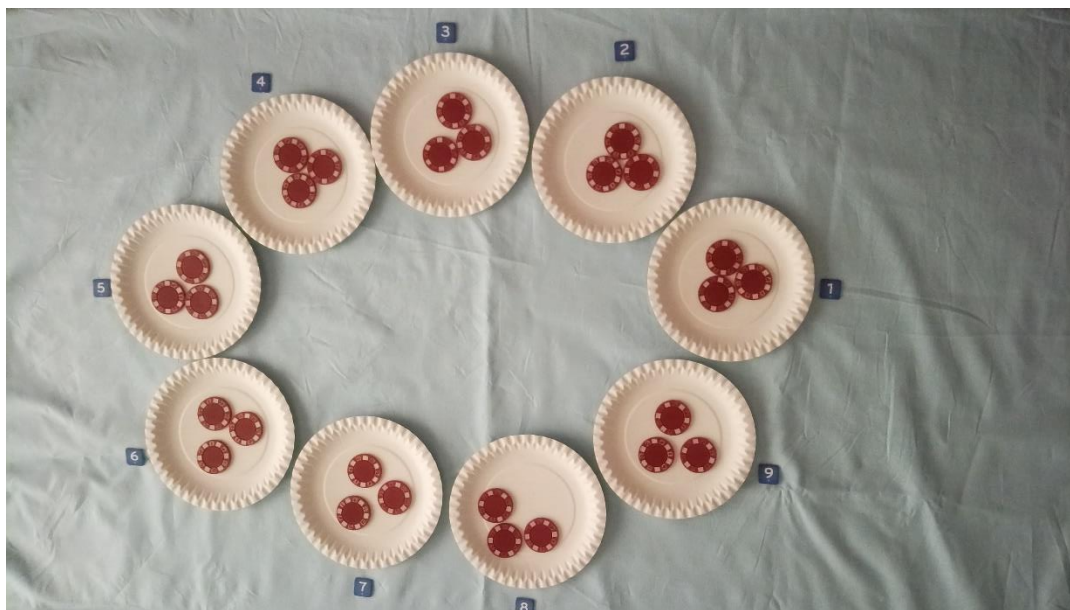


Nějaké další instrukce nedávám. Rozdejte kuličky prostě tak, jak chcete, ukažte, co si Vy představíte, pod tím pojmem rozdání kuliček. A pak se podíváme, jak to dopadlo. Někde vezme všechny tři kuličky a všechny je umístí do nějakého jiného důlku. Takové možnosti jsou čtyři a ani jedna není rozdáním. Někdo dá do některého důlku dvě a do jiného jednu. Takových možností je 20 a ani jedna není rozdáním. Zbývá pět možností, kdy jsou kuličky po jedné, ve třech sousedících důlcích. Čtyři z nich rozdáním jsou, poslední, č. 5 rozdáním není.

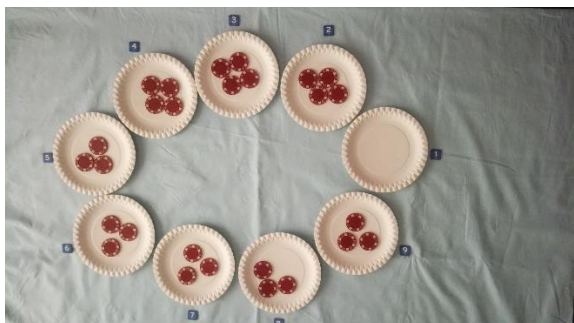


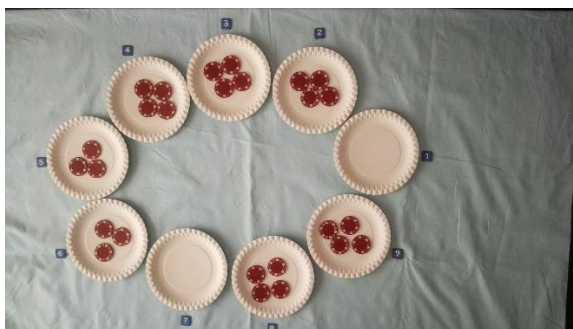
Které rozdávání se použije, určují pravidla hry. Naučíme se nyní variantu, kterou zvládají i předškoláci.

Připravíme si např. devět tácků se třemi kuličkami na každém (tácky vyžadují ploché předměty, používáme tedy pokerové žetony).



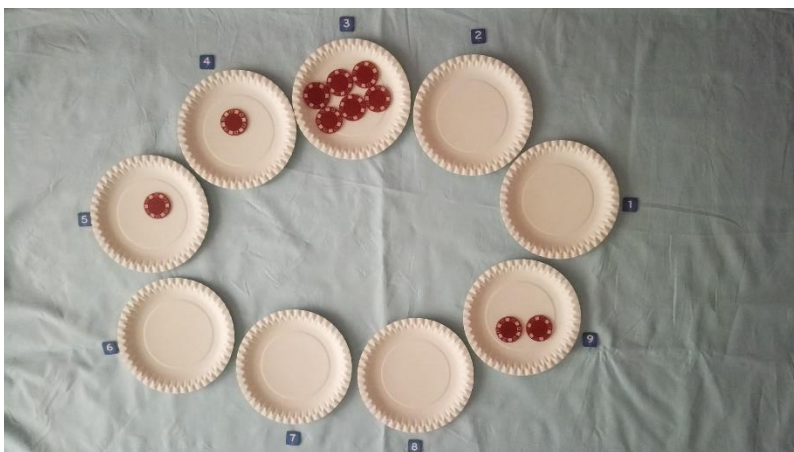
Pravidla jsou následující. Kdo je na tahu, vybere si tácek, ze kterého bude rozdávat. Pak si vybere směr, kterým půjde. Pokud poslední rozdávaný žeton z ruky padne na prázdný tácek, hráč si ho vezme jako trofej. Kdo tímto způsobem nasbírá nejvíc žetonů, vyhraje. Lze hrát jak ve dvou hráčích, tak i s větší skupinou. Ve větší skupině ovšem mají děti tendenci nepočítat nejlepší tah, a hrají z táčku, který mají nejbliž. Vzhledem k tomu, že jsme řekli, že si vybíráme směr rozdávání, používáme rozdávání typu 1 a 4 – zvoleným směrem pokládáme první žeton do sousedního důlku.





Rozdali jsme důlek č. 1 ve směru proti hodinkám, další hráč hrál z důlku č. 7 a poslední žeton, který položil do důlku č. 1, si vezme jako trofej. Hra může pokračovat, dokud z táček nezmizí všechny žetony.

Hru lze obměňovat – použít lze jiný počet táček, jiný počet žetonů na začátku, povolit jen jeden směr rozdávání (obvyklejší je proti hodinkám). Nebo můžete přidat „ocáskové“ pravidlo. Pokud hráč rozdál tak, že poslední žeton padl na prázdný tácek a též předposlední, předpředposlední, atd. žeton padl na prázdný tácek, bere si celou takovou řadu. Vždy se bere jen nepřerušovaná řada od posledního položeného žetonu proti směru rozdávání a jen z důlků, na které pokládal žetony hráč, který provádí tah. Bude-li na některém táčku jeden žeton díky tahu předchozího hráče, takový žeton sebrat nemůžeme. Pokud rozdáme tácek č. 3 se šesti žetony ve směru po hodinkách, skončíme rozdávání v důlku č. 6 a můžeme si vzít ocásek z táček 6, 7, a 8. Žetony na táčkách 4 a 5 nebyly součástí našeho rozdávání a žetony na táčkách 1 a 2 si také vzít nemůžeme, jelikož řada byla přerušena neprázdným důlkem č. 9.



Kromě hraní mankaly je možné tácky a žetony využít k názornému počítání.

Turnajové desky na Toguz jsou vymyšlené tak, aby bylo na první pohled vidět, zda je v důlku sudý, nebo lichý počet kuliček. Využijeme to např. ve variantě, která se hraje pod názvem Bestemše.



Počáteční pozice je na obrázku. Kdo je na tahu, rozdává jeden ze svých důlků způsobem č. 2. První kuličku vrací do důlku, který rozdává, dál pokračuje proti hodinkám. Jako trofej získá kuličky z důlku, kam dá poslední, pokud tu poslední vloží do důlku na soupeřově straně a vložením kuličky vytvoří sudý počet.

Ačkoliv velká turnajová deska používá pár dalších pravidel, my je v tuto chvíli nebudeme potřebovat. Zkusíme stejnou hru na větší desce.



Takto to vypadá na začátku, my se však potřebujeme dostat spíše ke konci hry. Mějme tedy pozici:



Mezi zkušenějšími hráči zvítězí ten, kdo bude moci provést více tahů. Úkolem obou hráčů je nyní postupně přesunout všechny kuličky do posledního, devátého důlku. Žádná nesmí jít na soupeřovu stranu, protože to by soupeř získal spoustu tahů. Současně se oba hráči budou snažit to provést tak, aby v žádném okamžiku nevytvořili v žádném důlku skupinu tří a více kuliček. Kdo je na tom lépe, se dá spočítat. Dlouhá léta jsme to počítali kuličku po kuličce, což zabralo desítky drahocenných vteřin turnajového času vymezeného na hru. Existuje však mnohem rychlejší způsob, využívající konstrukci desky a operace sčítání, odčítání a násobení.

Nejdříve spočítáme tahy dolního hráče. Při výpočtu si budeme pomáhat sledováním čísla důlku na soupeřově straně. Vezmeme to důlek po důlku od konce. Devátý důlek nás nezajímá, jakékoliv rozdání z něj jde na soupeřovu stranu. Z osmého důlku máme jeden tah (proti je důlek 2 a o jednu stranou je 1), ze sedmého důlku jsou dva tahy (proti 3, o jedna stranou je 2). Čtyři kuličky v šestém důlku nám to komplikují. Jak spočítat kolik z toho bude tahů, říká vzoreček

(počet kuliček) x (důlek proti a o jedna stranou) – konstanta pro příslušný počet kuliček.

Označíme si počet kuliček v důlku jako N (number). Důlek proti a o jedna stranou je krkolonné vyjádření pro $9 - C$, kde C (cup) je číslo důlku, který rozdáváme. Konstanta – no asi si budeme muset zapamatovat tabulku konstant... ta vypadá následovně:

Kuličky	Konstanta
3	2
4	5 (2+3)
5	9 (2+3+4)
6	14 (2+3+4+5)
7	20 (2+3+4+5+6)

A mohla by pokračovat dále. Tolik tahů ztratíme, proti ideálu, kdy by v důlku byly jen jedna nebo dvě kuličky. Zároveň ukazuje rozdíl mezi trojúhelníkovým číslem a násobkem dvou spodních řad v trojúhelníkovém čísle, což si ukážeme při výpočtu tahů horního.

Takže čtyři kuličky v šestém důlku, to je $4 \times (9 - 6) - 5 = 7$ tahů.

Pak je na řadě důlek č. 5, tam máme $2 \times 4 = 8$ tahů, $N \times (9 - C)$ bez odečítání konstanty, protože máme ideální stav, dvě kuličky. A důlek č. 4, to je $1 \times 5 = 5$ tahů. Poslední, důlek č. 3 už bude při znalosti vzorečku jednoduchý, $N = 5$, $C = 3$, konstanta pro $N = 5$ je 9, takže $5 \times 6 - 9 = 21$.

Teď už jen posčítáme všechno dohromady. A vyjde nám $1 + 2 + 7 + 8 + 5 + 21 = 44$.



Tahy horního můžeme spočítat více způsoby.

Buď sečteme výsledek za dvě řady s jednou kuličkou, tj. 8 až 6 a 8 až 2, nebo sečteme řadu tvořenou dvěma kuličkami s řadou s jednou kuličkou, pak v této jednokuličkové řadě ale musíme odečíst část, která v ní není.

Dvě řady: krátká řada končí číslem 6, podívám se naproti (4) a o jedna stranou (3) a násobím číslem o jedna menším (2), tedy $3 \times 2 = 6$. (konstanta tu není, dvojka je malá, ideální hodnota). Dlouhá řada končí číslem 2, proti je 8, o jedna stranou 7, násobím tedy 7×6 a odečítám konstantu pro menší číslo (6), ta je rovna 14. Tedy $7 \times 6 - 14 = 28$. Oba mezivýsledky sečteme, $6 + 28 = 34$ tahů pro horního.

Druhá možnost:

$$4 \times 3 = 12$$

Řada končí číslem 6, podívám se naproti (4) a násobím o jedna menším (3). Žádné konstanty se nepoužívají, u dvou kuliček nejsou potřeba.

Jednokuličková řada $7 \times 6 - 14 = 28$, ale musíme ještě odečíst $3 \times 2 = 6$, protože řada začíná až v pátém důlku. Po odečtení jednokuličkové řady z osmého do šestého důlku dostaneme $28 - 6 = 22$.

Mezivýsledky sečteme a máme $22 + 12 = 34$ tahů.

Třetí možnost:

$$4 \times 3 = 12$$

A přičítáme tahy za důlky s jednou kuličkou. Opět se podívám na soupeřovu stranu a uhnu o jedna stranou, nebo použiji 9 – C. $4 + 5 + 6 + 7 = 22$

$$12 + 22 = 34 \text{ tahů}$$

Kam dojde kulička

Zatím jsme nevyužili dělení. Ale i to se dá použít, a to při výpočtu, kam dojde kulička. Půjde o dělení se zbytkem. Modelová situace. V důlku č. 7 je 27 kuliček. Pokud ho rozdáme, kam dáme poslední kuličku?



Dá se to odpočítat prstem, ale přes vzoreček je to rychlejší. Počet kuliček (N) je 27. Důlek, který rozdáváme (C) je 7. Tato čísla stačí sečíst, odečíst jedna a vydělit devíti. Zbytek tohoto dělení udává číslo důlku, kam dáme poslední kuličku. Tedy $(N + C - 1) \bmod 9 = (27 + 7 - 1) \bmod 9 = 33 \bmod 9 = 6$.

Kyrgyzové počítají trošku odlišně: $(N - \text{protější důlek}) \bmod 9$. V našem případě tedy $(27 - 3) \bmod 9 = 24 \bmod 9 = 6$. Můžeme to napsat též jako $N - (10 - C) \bmod 9$. Zde už je vidět, že se jednoduchou úpravou dostaneme na českou verzi výpočtu (která mj. vznikla díky částečnému zapomenutí způsobu kyrgyzského po delší době nepoužívání...)

Tento princip funguje i na jiných deskách, dělí se počtem důlků v řadě, takže na desce pro Bestemše budeme počítat modulo 5.

Kromě počítání se při hraní mankaly dá procvičovat mnoho dalších věcí, ale to už je na samostatnou přednášku.